NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i

ST2304 Statistisk modellering for biologar og bioteknologar

Fagleg kontakt under eksamen: Jarle Tufto

Tlf: 99 70 55 19

Eksamensdato: 10. august 2016

Eksamenstid (frå–til): 9–13

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Tabeller og formler i statistikk, Tapir Forlag, K. Rottmann: Matematisk formelsamling, Kalkulator Casio fx-82ES PLUS, CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College eller HP30S, eit gult A4-ark med egne håndskrevne notater.

Annan informasjon:
Hjelpesider for nokre R funksjonar som du kan få bruk for følgjer i vedlegget. Alle svar skal grunngjevast og innehalde naudsynt mellomrekning.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 5

Sidetal vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Gå ut i frå at T er ein t-fordelt variabel med 10 frihetsgrader. La $f(t)$ vere sannsynstettleikfunksjonen til T. Skriv R-uttrykk som reknar ut følgjande:

a) $P(T > -1)$.

b) $f(2.5)$.

c) Eit tal slik at sannsynet for at T er mindre enn talet er 0.25.

Oppgåve 2 I denne oppgåva skal vi undersøke samanhengen mellom lengd (cm) og vekt (gram) til ulike individ tilhøyrende 7 ulike fiskeartar, sjå fig. 1.

Vi tilpassar fyrst følgjande modell kor art er inkludera som ein kategorisk faktor. Merk at både log og ln her er naturlege logaritmar.

```
> mod0 <- lm(log(vekt) ~ art + log(lengde))
> summary(mod0)

Call:
lm(formula = log(vekt) ~ art + log(lengde))

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.21688 -0.07552 -0.01007  0.05846  0.36861

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -5.10940    0.12834 -39.810  < 2e-16 ***
art2         0.12626    0.04570   2.763  0.00645 **
art3        -0.06717    0.03308  -2.030  0.04410 *
art4         0.20461    0.04016   5.095 1.04e-06 ***
art5        -0.61635    0.04985 -12.364  < 2e-16 ***
art6        -0.72022    0.03152 -22.849  < 2e-16 ***
art7         0.05513    0.02482   2.221  0.02787 *
log(lengde)  3.15532    0.03491  90.388  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.1028 on 149 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9943,Adjusted R-squared:  0.994
F-statistic:  3710 on 7 and 149 DF,  p-value: < 2.2e-16

> drop1(mod0,test="F")
Single term deletions

Model:
log(vekt) ~ art + log(lengde)
```

```
             Df Sum of Sq    RSS     AIC F value    Pr(>F)
<none>                     1.574 -706.61
art           6    13.299 14.873 -366.00  209.82 < 2.2e-16 ***
log(lengde)   1    86.307 87.881  -77.10 8169.91 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

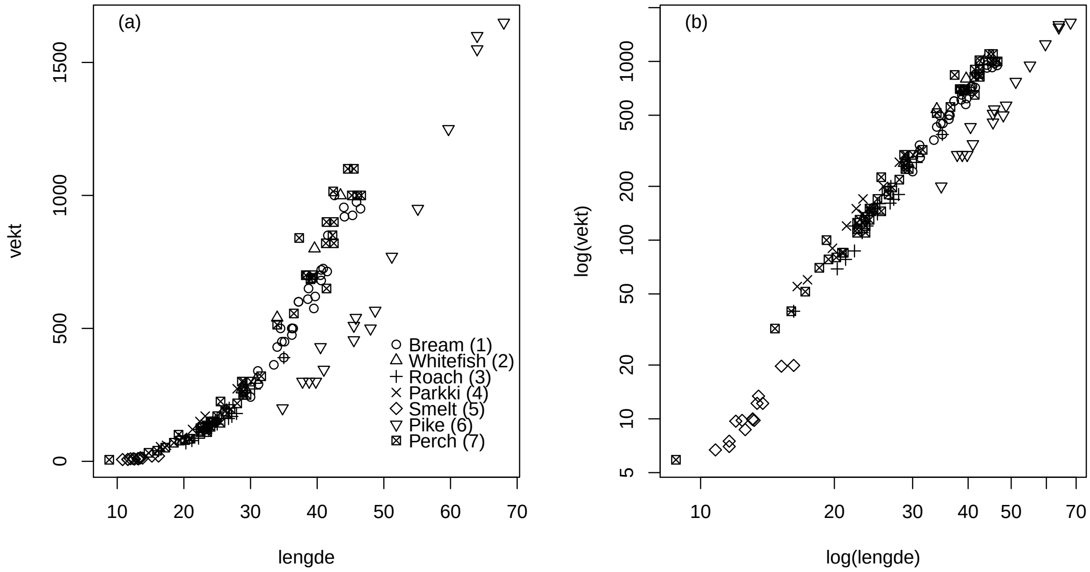
a) La $\ln y$ vere responsvariabelen (log vekt), $\ln x$ den numeriske forklaringsvariabelen (log lengde) og i den kategoriske faktoren (art). Vel passande namn på ukjende parametere og andre variablar og skriv så opp modellen i matematisk notasjon. Gjer greie for modellføresetnadene.

b) Hva for alternative modeller vert sammanligna ved bruk av `drop1` i utskriften ovanfor? Kva tydar det at testane er signifikante? Kor mange prosent mindre er estimert forventa vekt til eit individ tilhøyrande art nummer seks (Pike) i forhold til art nummer éin (Bream) gitt at individa har same lengd?

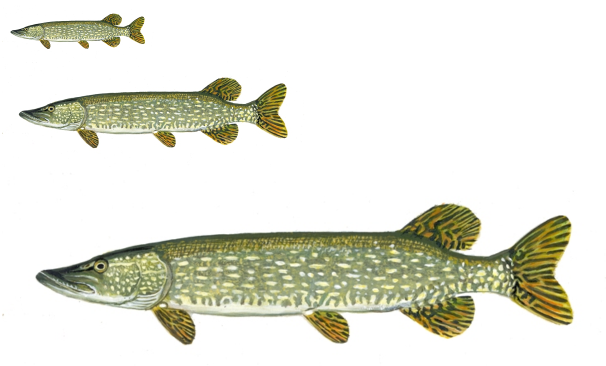
c) Kva er samanhengen mellom vekt y og lengde x innan ein gjeve art i? Dersom individ av ulike storleiker er formlike (sjå fig. 2) og har same tettleik (masse per volum), kva vert då samanhengen mellom vekt y og lengde x? Utfør ein test av denne nullhypotesen. Det oppgjevast at 2.5%-kvantilen til ein t-fordelt variabel med 149 frihetsgrader er 1.976.

Vi tilpassar til sist ein modell kor vi inkluderar ein interaksjon mellom $\ln x$ (log lengde) og i (art). Denne vert så samanlikna med den tidligare modellen som følgjer:

```
> mod1 <- lm(log(vekt) ~ art + log(lengde) + art:log(lengde))
> summary(mod1)

Call:
lm(formula = log(vekt) ~ art + log(lengde) + art:log(lengde))

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.21976 -0.07410 -0.00303  0.05732  0.36650

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      -4.941734   0.595909  -8.293 7.39e-14 ***
art2             -0.762713   1.136149  -0.671    0.503
art3             -0.083477   0.760774  -0.110    0.913
art4              0.413773   0.828279   0.500    0.618
art5             -0.326589   0.913790  -0.357    0.721
art6             -1.064880   0.775914  -1.372    0.172
art7             -0.137106   0.611482  -0.224    0.823
log(lengde)       3.109276   0.163559  19.010  < 2e-16 ***
art2:log(lengde)  0.250763   0.319349   0.785    0.434
art3:log(lengde) -0.001124   0.220029  -0.005    0.996
```



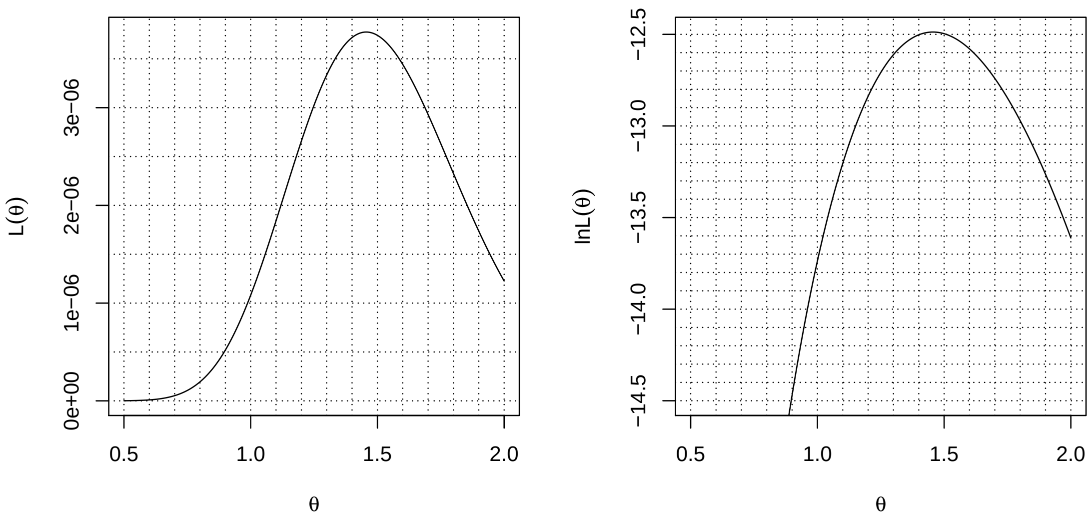
Figur 1: Lengd og vekt til 159 forskjellige individ tilhørande 7 forskjellige fiskearter plotta på orginal skala (a) og på log-log skala (b).



Figur 2: Tre formlike individ av ulik storleik.

```
art4:log(lengde) -0.075043   0.246613  -0.304    0.761
art5:log(lengde) -0.132480   0.315800  -0.420    0.675
art6:log(lengde)  0.091820   0.207914   0.442    0.659
art7:log(lengde)  0.053412   0.168604   0.317    0.752
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.1043 on 143 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9944,Adjusted R-squared:  0.9939
F-statistic:  1941 on 13 and 143 DF,  p-value: < 2.2e-16

> anova(mod0,mod1,test="F")
Analysis of Variance Table

Model 1: log(vekt) ~ art + log(lengde)
Model 2: log(vekt) ~ art + log(lengde) + art:log(lengde)
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1    149 1.5740
2    143 1.5548  6  0.019199 0.2943 0.9388
```

d) Forklar med ord kva for nullhypotese som testes mot kva for alternativ hypotese i F-testen ovanfor. Kva vert resultatet av testen? Verkar resultatet rimeleg i forhold til dei observerte dataene i fig. 1b?



Figur 3: Likelihood- og log-likelihoodfunksjon for modellen og dataene i oppgåve 3

.

Oppgåve 3 Vi ønskjer å estimere ein ukjend parameter θ. Vi samlar inn eit datasett og lager plot av likelihood- og log-likelihood funksjonen som vist i fig. 3.

a) Kva er eit fornuftig estimat $\hat{\theta}$ av den ukjente parameteren θ gitt plottet i fig. 3?

b) Utfør ein tilnærma test av nullhypotesa $H_0 : \theta = 1$ versus den alternative hypotesa $H_1 : \theta \neq 1$ ved bruk av informasjon som kan lesast av samme plot.

c) Det oppgjevast at $\frac{d^2}{d\theta^2} \ln L = -9.44$ for θ lik estimatet i punkt a). Bruk dette til å finne eit tilnærma estimat av standardfeilen til $\hat{\theta}$.

`TDist`	*The Student t Distribution*

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the t distribution with `df` degrees of freedom (and optional non-centrality parameter `ncp`).

Usage

```
dt(x, df, ncp, log = FALSE)
pt(q, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qt(p, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rt(n, df, ncp)
```

Arguments

`x, q`	vector of quantiles.
`p`	vector of probabilities.
`n`	number of observations. If `length(n) > 1`, the length is taken to be the number required.
`df`	degrees of freedom (> 0, maybe non-integer). `df = Inf` is allowed.
`ncp`	non-centrality parameter δ; currently except for `rt()`, only for `abs(ncp) <= 37.` If omitted, use the central t distribution.
`log, log.p`	logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).
`lower.tail`	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \le x]$, otherwise, $P[X > x]$.

Details

The t distribution with $\mathtt{df} = \nu$ degrees of freedom has density

$$f(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$$

for all real x. It has mean 0 (for $\nu > 1$) and variance $\frac{\nu}{\nu-2}$ (for $\nu > 2$).

The general *non-central t* with parameters (ν, δ) = `(df, ncp)` is defined as the distribution of $T_\nu(\delta) := (U + \delta)/\sqrt{V/\nu}$ where U and V are independent random variables, $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ and $V \sim \chi^2_\nu$ (see Chisquare).

The most used applications are power calculations for t-tests:
Let $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ where $\bar{X}$ is the `mean` and S the sample standard deviation (`sd`) of $X_1, X_2, \ldots, X_n$ which are i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Then T is distributed as non-central t with $\mathtt{df} = n-1$ degrees of freedom and **n**on-**c**entrality **p**arameter $\mathtt{ncp} = (\mu - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$.

Value

`dt` gives the density, `pt` gives the distribution function, `qt` gives the quantile function, and `rt` generates random deviates.

Invalid arguments will result in return value `NaN`, with a warning.

The length of the result is determined by `n` for `rt`, and is the maximum of the lengths of the numerical arguments for the other functions.

The numerical arguments other than `n` are recycled to the length of the result. Only the first elements of the logical arguments are used.

Note

Supplying `ncp = 0` uses the algorithm for the non-central distribution, which is not the same algorithm used if `ncp` is omitted. This is to give consistent behaviour in extreme cases with values of `ncp` very near zero.

The code for non-zero `ncp` is principally intended to be used for moderate values of `ncp`: it will not be highly accurate, especially in the tails, for large values.

Source

The central `dt` is computed via an accurate formula provided by Catherine Loader (see the reference in `dbinom`).

For the non-central case of `dt`, C code contributed by Claus Ekstroem based on the relationship (for $x \neq 0$) to the cumulative distribution.

For the central case of `pt`, a normal approximation in the tails, otherwise via `pbeta`.

For the non-central case of `pt` based on a C translation of

Lenth, R. V. (1989). *Algorithm AS 243* — Cumulative distribution function of the non-central t distribution, *Applied Statistics* **38**, 185–189.

This computes the lower tail only, so the upper tail suffers from cancellation and a warning will be given when this is likely to be significant.

For central `qt`, a C translation of

Hill, G. W. (1970) Algorithm 396: Student's t-quantiles. *Communications of the ACM*, **13(10)**, 619–620.

altered to take account of

Hill, G. W. (1981) Remark on Algorithm 396, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **7**, 250–1.

The non-central case is done by inversion.

References

Becker, R. A., Chambers, J. M. and Wilks, A. R. (1988) *The New S Language*. Wadsworth & Brooks/Cole. (Except non-central versions.)

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995) *Continuous Univariate Distributions*, volume 2, chapters 28 and 31. Wiley, New York.

See Also

Distributions for other standard distributions, including `df` for the F distribution.

Examples

```
require(graphics)

1 - pt(1:5, df = 1)
qt(.975, df = c(1:10,20,50,100,1000))

tt <- seq(0, 10, len = 21)
ncp <- seq(0, 6, len = 31)
ptn <- outer(tt, ncp, function(t, d) pt(t, df = 3, ncp = d))
t.tit <- "Non-central t - Probabilities"
image(tt, ncp, ptn, zlim = c(0,1), main = t.tit)
persp(tt, ncp, ptn, zlim = 0:1, r = 2, phi = 20, theta = 200, main = t.tit,
      xlab = "t", ylab = "non-centrality parameter",
      zlab = "Pr(T <= t)")

plot(function(x) dt(x, df = 3, ncp = 2), -3, 11, ylim = c(0, 0.32),
     main = "Non-central t - Density", yaxs = "i")
```